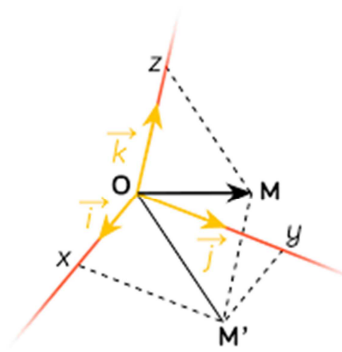


تحليلية الفضاء

إحداثيات نقطة بالنسبة لمعلم-إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

إذا كانت \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاث متجهات غير مستوية و O نقطة من الفضاء .
نقول إن المثلث $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس للفضاء و أن المربع $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء



ليكن $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما في الفضاء و لنكن M نقطة من الفضاء

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \diamond$$

المثلث (x, y, z) يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و نكتب $M(x, y, z)$

x يسمى أفصول النقطة M

y يسمى أرتوب النقطة M

z يسمى أنسوب النقطة M

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ لكل متجهة \vec{u} من الفضاء توجد ثلاثة أعداد x و y و z حيث

لتكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى أساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v} \quad \blacksquare$$

▪ مجموع المتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو المتجهة : $\vec{u} + \vec{v}(x + x', y + y', z + z')$

▪ ضرب عدد في متجهة : $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ ، لدينا :

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) : \vec{AB} \text{ إحداثيات المتجهة } \blacktriangleright$$

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) : [AB] \text{ منتصف القطعة } \blacktriangleright$$

شرط استقامية متجهتين

لتكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ متجهتين من الفضاء.

$$\left| \begin{array}{cc} x & x' \\ z & z' \end{array} \right| = 0 \text{ و } \left| \begin{array}{cc} y & y' \\ z & z' \end{array} \right| = 0 \text{ و } \left| \begin{array}{cc} x & x' \\ y & y' \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ مستقيمتان } \blacklozenge$$

$$\left| \begin{array}{cc} x & x' \\ z & z' \end{array} \right| \neq 0 \text{ أو } \left| \begin{array}{cc} y & y' \\ z & z' \end{array} \right| \neq 0 \text{ أو } \left| \begin{array}{cc} x & x' \\ y & y' \end{array} \right| \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ غير مستقيمتين } \blacklozenge$$

المتجهات المستوائية

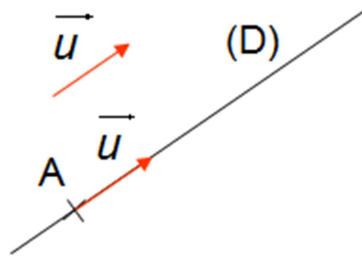
لتكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ و $\vec{w}(x'', y'', z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{w} \text{ و } \vec{v} \text{ و } \vec{u} \text{ مستوائية } \blacklozenge$$

❖ \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} : \text{حيث}$$

تمثيل بارامتري لمستقيم



الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ متجهة غير منعدمة .

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow M \in (D)$$

$$\text{النظمة : } \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(x_A, y_A, z_A)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$

معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

إذا كان (D) مستقيما مارا من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ متجهة موجهة له فإن النظمة :

$$\text{تسمى نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم } (D) \text{ (مع } \alpha \neq 0 \text{ و } \beta \neq 0 \text{ و } \gamma \neq 0 \text{)}$$

$$\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}$$

تمثيل بارامتري لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
لتكن $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ متجهتين غير منعدمتين
 $((t, t') \in \mathbb{R}^2) \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u}' \Leftrightarrow M \in (P)$

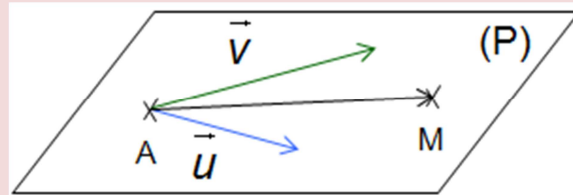
النظمة : $((t, t') \in \mathbb{R}^2)$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$
 و $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{u}'(\alpha', \beta', \gamma')$ بالمتجهتين

معادلة ديكارتية لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
ليكن (P) لمستوى المار من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow M(x, y, z) \in (P)$$



معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $ax + by + cz + d = 0$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$)

الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن $(D) = D(A, \vec{u})$ و $(\Delta) = D(B, \vec{v})$ مستقيمين في الفضاء

- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين و $A \in (\Delta)$ أو $B \in (D)$ فإن $(D) = (\Delta)$
- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين و $A \notin (\Delta)$ فإن (D) و (Δ) متوازيان قطعاً
- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين و $dét(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ فإن (D) و (Δ) متقاطعان
- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين و $dét(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ فإن (D) و (Δ) غير مستوائيين

الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ و $(Q) = P(B, \vec{u}', \vec{v}')$ مستويين في الفضاء

- (P) و (Q) متوازيين إذا فقط إذا كانت $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') = 0$ و $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') = 0$ أي \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' و \vec{v}' مستوائية
- (P) و (Q) متقاطعان إذا فقط إذا كانت $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}') \neq 0$ و $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') \neq 0$ أي \vec{u} و \vec{v} و \vec{u}' و \vec{v}' غير مستوائية

$(P): ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

و $(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ حيث $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$

- (P) و (Q) متقاطعان إذا فقط إذا كانت $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$
- (P) و (Q) متوازيان قطعاً إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث:
 $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' \neq \lambda d$
- (P) و (Q) منطبقين إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث:
 $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' = \lambda d$

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفضاء

ليكن $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ مستوى في الفضاء و $(D) = D(B, \vec{w})$ مستقيم في الفضاء

- (P) و (D) متوازيان إذا وفقط إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية أي $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
- (P) و (D) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية أي $dét(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$